

新能源发电的伊藤随机过程模型

陈晓爽, 林今, 刘锋, 宋永华

(电力系统及发电设备控制和仿真国家重点实验室(清华大学电机系), 北京市海淀区 100084)

Itô Stochastic Process Model for Renewable Generations

CHEN Xiaoshuang, LIN Jin, LIU Feng, SONG Yonghua

(State Key Lab of Control and Simulation of Power Systems and Generation Equipments

(Department of Electrical Engineering, Tsinghua University), Haidian District, Beijing 100084, China)

ABSTRACT: With the increasing penetration of renewable energy generations, the uncertainties of these generations bringsignificant influences on power system operations and control. The Itô process is an important tool in the analysis of stochastic dynamic systems. It models the uncertainties of renewable generations as stochastic differential equations, which is consistent with the ordinary-differential-equation model of the dynamics of power systems. Therefore, the Itô-process model makes it easier to analyze the impacts of uncertainties on power system dynamics. Power system analysis and control based on the Itô-process model achieve success in many areas, such as stability analysis, security analysis, optimal control, etc. However, it is still an open problem whether the Itô-process model can describe the stochastic characteristics of renewable generations accurately, which is very fundamental in power system analysis and control based on Itô processes. Under this background, this paper discussed the ability of Itô processes to describe the uncertainties of renewable generations thoroughly. On the one hand, we proved that the Itô-process model can be used to accurately describe the probability distribution, the temporal and spatial correlation of renewable generations; on the other hand, this paper proposed a parameter estimation method of the Itô-process model in order to obtain the parameters based on historical data. Case studies show that the Itô-process model can be compatible with existing models of renewable generations, and can be estimated in a data-driven manner, thus providing a modeling basis for the further applications of the Itô process in the power system.

KEY WORDS: renewable energy; uncertainty; Itô process; stochastic control; probability distribution; correlation; parameter estimation

摘要: 随着新能源发电渗透率的不断增加, 其出力随机性对电力系统的动态运行与控制产生的影响日益显现。伊藤过程是分析随机动态系统演化特性的重要基础理论, 其将新能源出力的随机性建模为随机微分方程, 可与电力系统动态过程的常微分方程模型统一处理, 从而可较好地分析随机性对电力系统动态过程的影响。虽然该理论已在电力系统的稳定分析、动态安全、最优控制等领域取得了研究成果, 然而, 现有研究工作均尚未系统回答伊藤过程能否被用于准确刻画新能源的出力随机性这一基础性问题。因此, 该文从模型和数据的角度分别论证了伊藤过程用于新能源出力随机性建模的可行性与完备性: 一方面, 证明伊藤过程模型可以用于描述新能源随机性的概率分布、空间相关性、时序相关性等; 另一方面, 给出了基于极大似然估计的伊藤过程模型参数估计方法, 可基于历史数据实现伊藤模型的参数辨识。最后, 通过算例说明伊藤过程既可与现有的随机性模型相兼容, 又可以数据驱动的方式进行参数在线辨识, 从而为伊藤过程在电力系统中的进一步应用提供建模基础。

关键词: 新能源; 不确定性; 伊藤过程; 随机控制; 概率分布; 相关性; 参数辨识

0 引言

随着社会经济的高速发展, 风电、光伏等新能源发电在电力系统中的重要性日益增加^[1-2]。与传统的火电、水电机组的出力特性不同, 风电和光伏发电的出力具有较强的随机性, 而随机性对于电力系统的稳态及动态运行控制造成了重大挑战^[3-4]。

在考虑随机性的条件下, 电力系统的动态特性由常微分方程转变为随机微分方程, 其特性更为复杂, 也更难以求解。针对该问题, 常用的求解方法包括基于场景的数值方法和基于模型的解析方法。

基金项目: 国家重点研发计划项目(2018YFB0905200); 四川省重点研发计划项目(18SXYHZ0049); 国家自然科学基金项目(51577096, 51677100, 51761135015)。

National Key R&D Program of China (2018YFB0905200); Key R&D Program of Sichuan Province (18SXYHZ0049); National Natural Science Foundation of China (51577096, 51677100, 51761135015).

基于场景的数值方法将新能源出力的随机性模拟成大量的场景,而每个场景均不再含有随机性,可以采用确定性控制的方法进行求解^[5-7]。基于场景的方法在电力系统运行控制的研究中取得了良好的效果,但大量场景带来的计算复杂度对该类方法的实际应用形成了制约^[8-9]。

基于模型的解析方法通过合适的随机性模型,可以将新能源出力的随机性较好地纳入到电力系统的分析中。伊藤过程是分析随机动态系统演化特性的重要基础理论,它采用随机微分方程描述随机性,能够较好地描述随机性的概率分布和时序相关性,因此在金融^[10]、随机控制^[11]等注重时序耦合的领域均得到了广泛的应用。由于伊藤过程的随机微分方程形式和描述电力系统动力学特性的常微分方程类似,因此可以将随机性的伊藤过程模型和电力系统的常微分方程模型统一处理,从而较好地分析随机性对电力系统动态过程的影响^[9,12-15]。在稳定分析方面,文献[13]基于伊藤换元公式研究了AGC系统在随机扰动下的小信号稳定性问题;在安全分析方面,文献[12]利用后向Kolmogorov方程,研究了随机激励对系统频率动态安全性的影响机理问题,文献[9]利用伊藤过程的生成函数法,研究了AGC系统的各项控制指标的评估;在随机控制方面,文献[14-15]给出了级数展开方法,给出了新能源电力系统的分析和控制问题的快速求解方法。

以上文献均研究了伊藤过程在电力系统运行控制问题中的应用,但其中所采用的伊藤过程模型均为简化的模型(如线性模型等),并不能充分描述较复杂的新能源随机性。事实上,文献[9,13]中均采用了线性伊藤过程模型,而该类模型仅能描述正态分布的随机特性;文献[14-15]中利用Fokker-Planck方程证明了伊藤过程可以描述任意的概率分布特性,但并未涉及新能源随机性的时序相关性。因此,现有研究工作均尚未系统回答伊藤过程能否被用于准确刻画新能源的出力随机性这一基础性问题。该问题的主要挑战在于,基于随机动态分析的伊藤过程模型和传统的基于概率分布等方法的模型在形式上差别较大,并不容易建立两者之间的联系。该类研究的缺乏制约了伊藤过程理论在电力系统运行控制问题中的进一步应用。

基于上述背景,本文系统地论证了伊藤过程在新能源随机性建模方面的适用性,以便进一步推广伊藤过程在新能源电力系统中的应用。一方面,本

文从模型的角度证明了伊藤过程不仅能描述常见的新能源随机性概率分布,还能对新能源随机性的时序相关性、空间相关性等进行较为精确的描述。另一方面,本文从历史数据的角度给出了基于极大似然估计的伊藤过程参数估计方法。最后,通过算例分析进一步说明了伊藤过程用于建模新能源出力随机性的有效性,从而为伊藤过程在新能源电力系统中的应用提供了建模基础。

本文组织如下:第1节简要论述伊藤过程在电力系统中的应用;第2节讨论伊藤过程的概率分布和空间相关性;第3节讨论伊藤过程的时序相关性;第4节给出伊藤过程的参数估计方法;第5节通过算例论证本文相关结论的正确性;第6节总结全文。

1 电力系统动态问题和伊藤过程

1.1 考虑随机性的电力系统动态问题

在电力系统的动态分析与控制中,常会遇到如下形式的动态方程:

$$\dot{\mathbf{X}}_t = \mathbf{b}(\mathbf{X}_t) \quad (1)$$

式中: \mathbf{X}_t 为系统的状态变量,例如系统频率、发电机状态等;函数 \mathbf{b} 则表示系统的状态方程和控制律方程等。在该系统的最优控制问题中,需要优化的目标函数可以写作如下形式:

$$J = \int_0^T f(\mathbf{X}_t) dt \quad (2)$$

式中: T 为控制周期;函数 f 描述了系统的控制效果。在电力系统的控制问题中,对于该类问题有较多的研究,例如文献[16]采用了模型预测控制(model predictive control, MPC)的方法处理孤立电力系统的频率响应问题,文献[17]给出了电力系统频率稳定的鲁棒控制策略。

由于新能源出力的随机性较大,在新能源电力系统的运行控制问题中显式考虑新能源出力随机性的影响,是一个重要的研究方向,并且有大量的文献对此进行了研究^[5-7]。为了便于分析,此处给出较为一般性的考虑随机性的表达式,即:

$$\dot{\mathbf{X}}_t = \mathbf{b}(\mathbf{X}_t, \boldsymbol{\xi}_t) \quad (3)$$

式中 $\boldsymbol{\xi}_t$ 为新能源出力的随机性变量。

由于 $\boldsymbol{\xi}_t$ 的存在,状态变量 \mathbf{X}_t 是含有随机性的,因此式(2)中的目标函数需要写作期望形式,即:

$$J = \mathbf{E} \int_0^T f(\mathbf{X}_t) dt \quad (4)$$

式中 \mathbf{E} 表示对 ξ_t 求期望。

由于新能源出力的随机性 ξ_t 的统计特性较为复杂, 在式(4)中, 期望值的求解是一个具有挑战性的问题。由于很难采用解析的方法对式(4)进行求解, 在现有的方法中, 一般采用基于场景集的思路对该式进行仿真求解和优化。

1.2 基于场景集的数值方法

基于场景集的方法根据随机性模型, 通过蒙特卡洛仿真等方法模拟出一系列场景, 并将每个场景代入电力系统模型中以便分析^[5-7]。具体来说, 假设抽取了 ξ_t 的 M 个场景, 即 $\{\xi_t^\omega\}_{\omega=1,2,\dots,M}$, 那么式(3)、(4)可以写作:

$$\begin{cases} \dot{X}_t^\omega = b(X_t^\omega, \xi_t^\omega) \\ J = \frac{1}{M} \sum_{\omega=1}^M \left(\int_0^T f(X_t^\omega) dt \right) \end{cases} \quad (5)$$

由于式(5)中的随机量 ξ_t 已经被替换成确定性的场景 ξ_t^ω , 因此原始的随机控制问题被转化成一个确定性控制的问题, 可以通过确定性控制的相关方法得以求解。

基于场景集的方法在电力系统运行控制中得到了大量应用, 但大量场景带来的计算复杂度对该类方法的实际应用形成了制约^[8-9]。一般来说, 式(5)的问题规模和场景数量 M 成正比, 而为了保证准确性, M 通常需要很大。例如文献[18]的研究表明, 对于一类含有 100 个变量的含约束随机优化问题, 至少需要 20000 个场景才能达到 99% 的置信度。因此, 基于场景集的方法难以适用于较大规模的系统。

值得注意的是, 现有方法在计算复杂度方面的困难并非来源于具体的运行控制模型, 而是来源于对随机性的处理方法, 即场景集处理方法。而采用场景集处理方法的一个重要原因是现有的新能源出力随机性模型(包括基于概率分布的模型、基于时间序列的模型等)难以和电力系统的动态特性在统一的框架下建模, 因此只能采用场景集作为“过渡”模型。近年来, 一些文献将新能源出力随机性建模为伊藤过程模型, 并在此基础上研究了电力系统的运行控制问题, 其效果较传统方法有了较大的改进。下文中将介绍伊藤过程模型在电力系统控制问题中的优势。

1.3 基于伊藤过程的方法

伊藤过程采用随机微分方程描述随机变量的随机特性。由于能够很好地刻画随机变量的时序特

征, 并且随机微分方程的很多特性和常微分方程有相似之处, 便于使用随机分析的相关工具进行处理, 因此伊藤过程在一些领域(尤其是金融领域^[10])得到了广泛应用。近年来, 一些文献开始将伊藤过程应用于电力系统领域^[9,12-15]。具体来说, 伊藤过程模型将随机变量 ξ_t 描述为如下的随机微分方程:

$$d\xi_t = \mu(\xi_t)dt + \sigma(\xi_t)dW_t \quad (6)$$

式中: W_t 为维纳过程, 是一类具有标准特性的随机过程^[19], 该随机微分方程定量描述了标准的维纳过程 W_t 和待建模的新能源随机性 ξ_t 之间的关系; $\mu(\xi_t)$ 为随机量向期望值移动的趋势, 称为漂移项; $\sigma(\xi_t)$ 为 W_t 的随机性对 ξ_t 的随机性的影响, 称为扩散项。通过不同形式的 $\mu(\xi_t)$ 和 $\sigma(\xi_t)$, 即可构造出不同特性的随机过程 ξ_t 。

伊藤过程模型的优势在于其随机微分方程的表述形式和电力系统动态模型的常微分方程(式(3))非常接近。事实上, 可以将式(3)、(6)合写为如下形式:

$$d \begin{bmatrix} X_t \\ \xi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(X_t, \xi_t) \\ \mu(\xi_t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \sigma(\xi_t) \end{bmatrix} dW_t \quad (7)$$

可以看出, 式(7)也是随机微分方程的形式, 因此 X_t 和 ξ_t 整体也可以看作伊藤过程。这就实现了随机性和系统动态的统一描述。此时, 只需要用随机微分方程的相关工具代替常微分方程的相关工具, 就有可能对电力系统动态和随机性进行统一的分析。文献[9,12-15]中均利用伊藤过程和常微分方程的统一性简化了含有随机性的电力系统的分析与控制。

1.4 现有方法存在的问题和本文的主要工作

尽管伊藤过程模型表现出了很好的与电力系统运行特性相结合的特性, 但是已有文献并未加大如下问题: 伊藤过程能否有效地建模新能源出力的随机性? 现有的基于伊藤过程的研究^[9,12-15]均直接假设新能源出力随机性满足伊藤过程模型, 并且仅采用了最简单的线性伊藤过程描述新能源随机性。可以证明, 线性伊藤过程模型仅能描述高斯分布, 而已经有文献表明新能源的随机性不满足高斯分布^[20], 因此, 现有的基于伊藤过程的分析和控制方法难以应用在实际的电力系统中。

当前, 已经有很多文献提出了描述随机性的模型^[20-21], 它们涵盖了随机性的概率分布、时序相关性、空间相关性等。因此, 为了扩展上述基于伊藤过程的运行控制方法在电力系统中的应用, 必须解

答如下问题：伊藤过程是否能够与现有文献中的新能源随机性模型有效地兼容，以及如何根据现有的模型或者历史数据得到伊藤过程模型。而根据本文作者的了解，文献中仍然缺乏对该问题的系统性研究。

针对上述问题，本文将系统地论述伊藤过程在处理新能源随机性方面的适用性，包括概率分布、协方差、时序相关性等。本文将从两个角度论述这一问题：从模型的角度，本文将讨论如何根据现有的一些随机性模型构造相应的伊藤过程模型，以便证明伊藤过程模型与这些现有模型的兼容性；另一方面，本文将讨论如何根据历史数据得到伊藤过程模型，并通过验证所得到的伊藤过程模型的有效性。

2 基于模型的伊藤过程构造方法

2.1 新能源随机性的常见模型

假设有 N 个新能源机组，第 i 个新能源机组在时刻 t 时的出力为 $P_{i,t}$ 。同时，考虑新能源出力的预测值为 $P_{i,t}^{\text{pred}}$ ，则有如下关系：

$$P_{i,t} = P_{i,t}^{\text{pred}} + \xi_{i,t} \quad (8)$$

式中 $\xi_{i,t}$ 为预测误差。

一般来说，新能源出力 $P_{i,t}$ 的随机特性与其预测误差 $\xi_{i,t}$ 的随机特性并不相同，例如对于风电，其出力可以用 Weibull 分布描述^[22]，但文献[20]的研究表明，风电预测误差用 Beta 分布描述更加合理。本文主要讨论的随机性为新能源出力预测误差 $\xi_{i,t}$ 的随机特性。此外，研究表明风电和光伏的出力预测误差均具有较强的长尾效应^[20,23]，因此用正态分布通常难以描述。为方便起见，后文中将用列向量 ξ_t 表示所有新能源机组的出力预测误差。

如果考虑不同的节点 i 和时刻 t ，在多维空间下的各个 $\xi_{i,t}$ 的联合分布会非常复杂。文献中研究新能源出力随机性时，一般将每个节点的新能源随机性的边缘分布和多个节点之间的空间相关性分开考虑。常见的概率分布包括正态分布^[5]、拉普拉斯分布^[24]、Beta 分布^[20]、柯西分布^[25]等。描述相关性的方法包括协方差^[26]、Copula 函数^[27]等。

以上讨论了单个时刻的新能源出力随机特性，而很多文献中还讨论了新能源出力的时序相关性，例如自回归滑动平均 (auto-regressive moving-average, ARMA) 模型^[28-30]、马尔科夫模型^[21,31]、自

相关函数模型^[32]等。

最简单的 ARMA 模型是 ARMA(1, 0) 模型，即：

$$\xi_t = \varphi \xi_{t-1} + \theta \varepsilon_t \quad (9)$$

式中 ε_t 为相互独立的标准正态分布随机变量，也是 ARMA 模型中的随机性来源。在向量形式下，通过合适的数学变换，一般的 ARMA(p, q) 模型均可变换为 ARMA(1, 0) 模型^[33]。ARMA 模型可以直观描述历史数据对于未来的影响，且模型较为简单，因此常被用于描述负荷和发电的时序模型^[30]。

马尔科夫模型是一类无后效性模型，即随机量的概率分布仅取决于前一个时刻的状态，而不取决于更早的状态。马尔科夫模型及其推广形式在新能源随机性建模中也很常用，例如文献[21]采用隐马尔科夫模型(hidden Markov model, HMM)描述光伏的随机性在不同状态之间的切换过程。显然，ARMA(1, 0) 模型也是一类马尔科夫模型。

更一般的时序相关性可以采用自相关函数 $R_i(\tau)$ 描述，其定义如下：

$$R_i(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \{ \xi_{i,t} \xi_{i,t+\tau} \} \quad (10)$$

式中： $t \rightarrow \infty$ 表示平稳状态； $R_i(\tau)$ 衡量了随机过程 $\xi_{i,t}$ 在间隔为 τ 的两个时刻的值之间的相关性。一个特例是 $\tau=0$ 时， $R_i(\tau)=R_i(0)$ 即为 $\xi_{i,t}$ 的方差。自相关函数可以更直接地体现新能源随机性的时序相关性，也便于统计。在风电的分钟级到秒级的波动中，常采用该类描述及其等价的功率谱描述^[32]。

本节将讨论上述常见的随机性模型如何在保证随机特性不变的前提下转化为伊藤过程模型，并将从概率分布、空间相关性和时序相关性 3 个方面讨论伊藤过程的构造方法。值得注意的是，尽管有大量的文献研究伊藤过程的相关性质，但本节所讨论的是其逆问题，即满足给定性质的伊藤过程的构造方法。特别地，满足本文中讨论的随机特性的伊藤过程构造方法，在已有的文献中并无论述，因此本节将要介绍的构造方法是本文的主要贡献之一。

2.2 考虑概率分布的伊藤过程构造方法

本节考虑一维的随机变量，给定其概率分布，构造相应的伊藤过程。具体的构造算法如图 1 所示。在图 1 中， λ 是任意的正实数，这说明伊藤过程的构造方法不是唯一的。这种不唯一性是因为此处尚未考虑随机变量的时序相关性。因此， λ 的确定将在 2.4 节中论述。

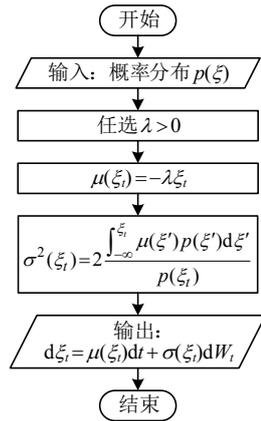


图 1 考虑概率分布的伊藤过程构造方法

Fig. 1 Construction of Itô processes considering probability distribution

图 1 的证明可以参考附录 A。该算法的核心在于如下：

$$\sigma^2(\xi_t) = 2 \frac{\int_{-\infty}^{\xi_t} \mu(\xi') p(\xi') d\xi'}{p(\xi_t)} \quad (11)$$

式(11)给出了在已知新能源出力随机性 ξ_t 的概率分布的情况下，伊藤过程的扩散项 $\sigma(\xi_t)$ 和漂移项 $\mu(\xi_t)$ 之间所满足的关系。因此，通过合理选取漂移项和扩散项，伊藤过程可以描述任意形式的概率分布。对于一些常见分布，漂移项和扩散项都有比较简明的表达式。表 1 中给出了一些常见分布的漂移项和扩散项。

表 1 新能源发电随机性的典型概率分布对应的漂移项和扩散项

分布	概率密度函数	漂移项	扩散项
正态分布	$\frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \exp[-\frac{(\xi-a)^2}{2b}]$	$-(\xi-a)$	$2b$
Beta 分布	$\frac{1}{B(a,b)} \xi^{a-1} (1-\xi)^{b-1}$	$-(\xi - \frac{a}{a+b})$	$\frac{2}{a+b} \xi(1-\xi)$
Gamma 分布	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} \xi^{a-1} \exp(-b\xi)$	$-(\xi - \frac{a}{b})$	$2\frac{\xi}{b}$
Laplace 分布	$\frac{1}{2b} \exp(-\frac{ \xi-a }{b})$	$-(\xi-a)$	$2b \xi-a + 2b^2$

2.3 考虑空间相关性的伊藤过程构造方法

在图 1 所示的算法的基础上，本节进一步讨论在多维的情形下，考虑空间相关性的构造方法。本节希望解决的问题是：如何让伊藤过程的各个变量满足相应的边缘概率分布的同时，保证各个变量间满足如下协方差矩阵所描述的空间相关性^[26]：

$$\mathbf{M} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \xi_t \xi_t^T \quad (12)$$

式中 $t \rightarrow \infty$ 表示平稳状态，注意这是出于数学上的严谨性考虑，而实际应用中， ξ_t 通常在很短的时间内即可趋于平稳。

为了方便起见，定义如下辅助的函数矩阵：

$$\mathbf{D}(\xi_t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(\xi_t) \boldsymbol{\sigma}(\xi_t)^T \quad (13)$$

$\mathbf{D}(\xi_t)$ 的对角项为 $D_{ii}(\xi_{i,t}) = 0.5 \sigma_i^2(\xi_{i,t})$ ，可以根据式(11)，由各个变量的边缘分布计算。因此，为考虑空间相关性，核心在于 $\mathbf{D}(\xi_t)$ 的非对角项的计算。

为了给出非对角项的计算公式，按照如下方式定义矩阵 \mathbf{M} 和函数矩阵 $\mathbf{D}(\xi_t)$ 的相关系数：

$$\begin{cases} r_{ij} = \frac{m_{ij}}{\sqrt{m_{ii} m_{jj}}} \\ r'_{ij} = \frac{D_{ij}(\xi_t)}{\sqrt{D_{ii}(\xi_{i,t}) D_{jj}(\xi_{j,t})}} \end{cases} \quad (14)$$

本文在附录 B 中证明了函数矩阵 $\mathbf{D}(\xi_t)$ 的各个元素满足如下的表达式：

$$r'_{ij} = \theta_{ij} r_{ij} \quad (15)$$

式中 θ_{ij} 为修正项，可按照如下方法计算：

$$\theta_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\mathbf{E} D_{ii}(\xi_{i,t}) \mathbf{E} D_{jj}(\xi_{j,t})}}{\mathbf{E} \sqrt{D_{ii}(\xi_{i,t}) D_{jj}(\xi_{j,t})}} \quad (16)$$

由此， $\mathbf{D}(\xi_t)$ 和 \mathbf{M} 的相关系数具有简单的线性关系，因此，可以根据式(15)、(16)构造出如图 2 的考虑空间相关性的伊藤过程构造方法。

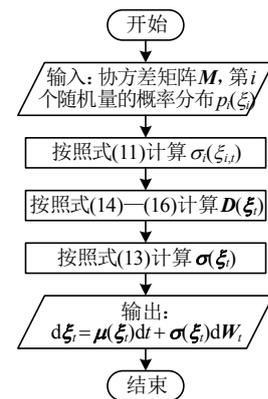


图 2 考虑空间相关性的伊藤过程构造方法

Fig. 2 Construction of Itô processes considering spatial correlation

2.4 考虑时序相关性的伊藤过程构造方法

本节讨论考虑时序相关性的伊藤过程构造方法，包括两类时序相关性模型，即 ARMA 模型和自相关函数模型。对于 ARMA 模型来说，其与伊

藤过程模型可以很自然地兼容，而对于自相关函数模型，本节提出了一种构造方法，用于满足给定的自相关函数和概率分布，并证明了该方法的有效性。

2.4.1 将 ARMA 模型转化为伊藤过程

伊藤过程模型可以自然地兼容 ARMA 模型。例如式(9)中的 ARMA(1,0)模型，可以看作如下伊藤过程在 $\Delta t=1$ 的离散化：

$$d\xi_t = (\varphi - I)\xi_t dt + \theta dW_t \quad (17)$$

可以看出，式(17)是一个线性漂移项、常数扩散项的伊藤过程。由于其他的 ARMA 模型均可通过向量变换转化为 ARMA(1,0)模型，因此，ARMA 模型可以看作伊藤过程模型的一种特例。

2.4.2 将自相关函数模型转化为伊藤过程

本节考虑构造伊藤过程满足式(10)所表述的自相关函数。这里，可以注意到图 1 所述的满足给定概率分布的伊藤过程构造方法中，有一个任选正实数 λ 。该参数即可决定伊藤工程的时序相关性。具体来说，当 λ 为常数时，自相关函数满足如下指数形式^[9,19]：

$$R(\tau) = R(0) \exp(-\lambda \tau) \quad (18)$$

该形式的自相关函数是文献中最常用到的自相关函数形式，例如文献[9]中即利用了该性质，给出了 AGC 系统的 CPS 指标和 BAAL 指标的快速计算方法。

接下来，本节讨论在给定一般的自相关函数 $R(\tau)$ 的时候，如何构造相应的伊藤过程。一般来说，相关性会随着 τ 增大而降低。因此，有可能把 $R_i(\tau)$ 表示成一系列指数衰减的相关函数的和(积分)：

$$R_i(\tau) = R_i(0) \int_0^\infty q_i(\lambda_i) \exp(-\lambda_i \tau) d\lambda_i \quad (19)$$

尽管没有一般的方法计算 $q_i(\lambda_i)$ ，但是对于典型的衰减函数，尤其是指数和多项式衰减函数，均可以较方便地得到 $q_i(\lambda_i)$ 。表 2 给出了常用的 $q_i(\lambda_i)$ 的表达式。

表 2 典型自相关函数对应的 $q_i(\lambda_i)$

Tab. 2 $q_i(\lambda_i)$ for typical auto-correlation functions

自相关函数	$q_i(\lambda_i)$
$\exp(-\lambda_0 \tau)$	$\delta(\lambda - \lambda_0)$
$(\tau + \tau_0)^{-a} (a > 0)$	$\frac{\tau_0^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} \exp(-\lambda \tau_0)$
$\sum_k R_k(\tau)$	$\frac{1}{R(0)} \sum_k (R_k(0) q_k(\lambda))$

例如，对于 $R(\tau) = 1/(\tau + 1)$ ，有如下表达式：

$$R(\tau) = \int_0^\infty \exp(-\lambda) \exp(-\lambda \tau) d\lambda_i \quad (20)$$

因此有 $q(\lambda) = \exp(-\lambda)$ 。

显然有 $\int_0^\infty q_i(\lambda_i) d\lambda_i = 1$ ，再令 $q(\lambda) = 0, \forall \lambda < 0$ ，则可以认为 λ_i 是满足概率密度函数 $q(\lambda)$ 的一个随机变量。此时，可以采用如图 3 的算法构造相应的伊藤过程。

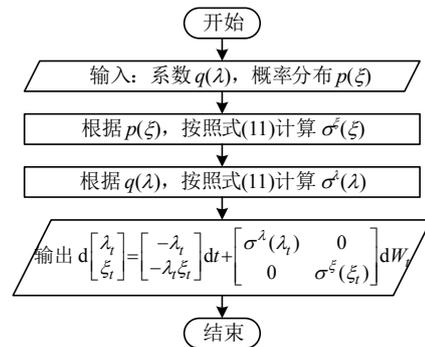


图 3 考虑时序相关性的伊藤过程构造方法

Fig. 3 Construction of Itô processes considering temporal correlation

图 3 所示的算法主要思路在于构造一个辅助的伊藤过程 λ_t ，用于描述多个指数时间相关性的概率叠加关系。附录 C 证明了图 3 所给出的算法的正确性。由此，给定新能源出力的概率分布和时序相关性，则可以构造相应的伊藤过程，满足这些统计特性。

2.5 小结

2.2 节论述了如何根据给定的概率密度函数，构造相应的伊藤过程，而 2.3、2.4 节则论述了如何在考虑概率密度函数的同时，进一步考虑时序相关性和空间相关性。应该注意到，图 2、3 所述的算法分别针对的是伊藤过程的扩散项和漂移项，它们的构造是完全解耦的。因此，可以同时考虑这两个算法，使得新能源随机性 ξ_t 的每一项均满足给定的概率分布，同时还满足给定的时序相关性和空间相关性。

本节的论述表明，伊藤过程具有较广泛的适用性，是文献中常用模型(例如基于概率分布的模型、基于协方差的模型等)的一种统一的表示形式，可以有效地描述新能源随机性的概率分布和时空相关性。

3 基于历史数据的伊藤过程参数估计方法

2 节中说明了伊藤过程用于描述新能源随机性的概率分布、时序相关性和空间相关性的可行性。

然而,在实际应用中,并不需要先根据历史数据计算出新能源随机性的分布、时空相关性等统计数据,再寻找合适的伊藤过程。相反,可以根据历史数据估计出伊藤过程的相关参数。在一些数学文献[34-35]中已经给出了一些伊藤过程的极大似然估计方法,本节在这些方法的基础上,给出一种更简洁的估计算法,以便更好地应用于新能源出力随机性的估计中。

由于历史数据均为离散采样,因此可以认为时间 t 是离散的。假设有一组观测数据 $\xi_0^o, \xi_1^o, \dots, \xi_T^o$, 其中上标“o”表示该组数据是 ξ_t 的观测值。本节的目标是以此为基础,计算如下伊藤过程的参数:

$$d\xi_t = \mu(\xi_t; \theta)dt + \sigma(\xi_t; \theta)dW_t \quad (21)$$

式中: $\mu(\xi_t; \theta)$ 、 $\sigma(\xi_t; \theta)$ 分别为参数化的漂移项和扩散项; θ 为待定的参数。根据实际情况,可以选择不同的函数形式和待定参数。一般来说,待定参数越多,模型的表达能力越强,但所需的拟合数据也越多。

极大似然法的目标是最小化如下负对数条件概率:

$$\min_{\theta} L = -\log \Pr\{\xi_1^o, \xi_2^o, \dots, \xi_T^o | \xi_0^o\} \quad (22)$$

将该目标函数 L 称为似然值。为求得该值,首先利用伊藤过程的增量独立性得到:

$$L = -\sum_{t=0}^{T-1} \log \Pr\{\xi_{t+1}^o | \xi_t^o\} \quad (23)$$

进一步地,考虑式(21)的离散形式:

$$\xi_{t+1} = \xi_t + \mu(\xi_t; \theta)\Delta t + \sigma(\xi_t; \theta)W_{\Delta t} \quad (24)$$

同时,根据伊藤过程的性质可知 $W_{\Delta t} \sim N(\mathbf{0}, \Delta t \mathbf{I})$, 因此有:

$$\xi_{t+1} \sim N(\xi_t + \mu(\xi_t; \theta)\Delta t, \sigma(\xi_t; \theta)\sigma(\xi_t; \theta)^T) \quad (25)$$

因此,根据 ξ_{t+1} 和 ξ_t 的观测值,即 ξ_{t+1}^o 和 ξ_t^o , 可以得到:

$$\Pr\{\xi_{t+1}^o | \xi_t^o\} = \frac{1}{\sqrt{(4\pi\Delta t)^N \det(\mathbf{D})}} \exp(-[\xi_{t+1}^o - \xi_t^o - \mu\Delta t]^T \mathbf{D}^{-1} [\xi_{t+1}^o - \xi_t^o - \mu\Delta t]) \quad (26)$$

将该式代入式(23),即可得到用极大似然法估计伊藤过程的待定参数的目标函数:

$$\min L' = \frac{1}{4} \sum_{t=0}^{T-1} [\xi_{t+1}^o - \xi_t^o - \mu\Delta t]^T \mathbf{D}^{-1} \cdot [\xi_{t+1}^o - \xi_t^o - \mu\Delta t] + \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{T-1} \log \det(\mathbf{D}) \quad (27)$$

式(27)是一个无约束的最优化问题,可以通过数值方法(如梯度下降法)求得最优的待定参数。

4 算例分析

本节对上述基于模型和基于数据的伊藤过程构造方法进行算例验证。4.1 节验证了基于模型的伊藤过程构造方法,即给定随机性的统计模型,构造相应的伊藤过程以满足这些统计特征。4.2 节针对实际的光伏电站和风电场的出力数据,验证基于历史数据的伊藤过程构造方法的有效性。

4.1 算例 1: 基于模型的伊藤过程构造方法

4.1.1 算例 1.1: 基于概率分布的构造方法

本算例用于图 1 所示的基于概率分布的构造方法的正确性。考虑两种类型的平稳分布,即正态分布 $N(0, 1)$ 和拉普拉斯分布 $\text{Laplace}(0, 1/\sqrt{2})$, 容易知道两者的均值和方差均相同。由表 1 可知两种情况下的伊藤过程的具体模型。其中 $\mu(\xi_t)$ 和 $\sigma(\xi_t)$ 可以根据具体的分布(正态分布或拉普拉斯分布),由表 1 确定。

按照该伊藤过程生成 10000 个场景,即 $\xi_t^{\omega} (1 \leq \omega \leq 10000)$, 其中 ω 表示场景编号。由于伊藤过程是一个随机过程,按照该伊藤过程通过蒙特卡洛仿真得到的每个场景均为一个时序曲线。因此,针对不同的时刻 t , 均可统计伊藤过程 ξ_t 的概率分布,如图 4 所示。

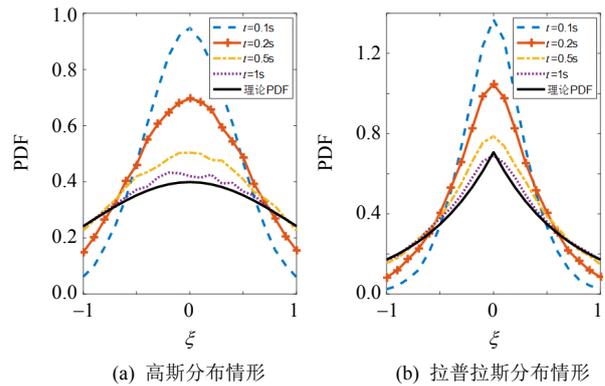


图 4 不同时刻的概率密度函数

Fig. 4 Probability density functions at different time

由图 4 可知,在起始时刻附近, ξ_t 的概率分布集中在初始值附近(在本例中,初始值为 0),但在一定时间后, ξ_t 的概率分布即收敛到平稳分布。在两种场景下, ξ_t 都收敛到对应的平稳分布,即正态分布和拉普拉斯分布。

4.1.2 算例 1.2: 基于空间相关性的构造方法

本节在前一节的基础上,考虑多个变量之间的

空间相关性，以便验证图 2 所示的考虑空间相关性的构造方法的正确性。考虑一个三维的伊藤过程 ξ_t ，希望其满足如下的协方差矩阵：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

同样考虑 2 种类型的边缘分布，即正态分布

$$d\xi_t = -\xi_t dt + \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{2}|\xi_{1,t}|+1} & 0 & 0 \\ 0.4858\sqrt{\sqrt{2}|\xi_{2,t}|+1} & \sqrt{1.08|\xi_{2,t}|+0.764} & 0 \\ 0 & \frac{0.4852\sqrt{\sqrt{2}|\xi_{2,t}|+1}\sqrt{\sqrt{2}|\xi_{3,t}|+1}}{\sqrt{1.08|\xi_{2,t}|+1}} & \sqrt{0.9783|\xi_{3,t}|+0.6918} \end{bmatrix} dW_t \quad (30)$$

随机生成 1000 个场景，并统计其协方差矩阵。在正态分布和拉普拉斯分布下，协方差矩阵分别如下：

$$M_{\text{正态分布}} = \begin{bmatrix} 0.9786 & 0.4983 & 0.0023 \\ 0.4983 & 1.0338 & -0.5151 \\ 0.0023 & -0.5151 & 1.0451 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$M_{\text{拉普拉斯分布}} = \begin{bmatrix} 1.0893 & 0.5114 & -0.0064 \\ 0.5114 & 0.9908 & -0.4508 \\ -0.0064 & -0.4508 & 0.9758 \end{bmatrix} \quad (32)$$

由此可见，统计得到的协方差和理论的协方差的区别不到 5%。图 5 给出了不同维度和不同分布下的散点图。

无论是高斯分布还是拉普拉斯分布下，均能看出 ξ_1 和 ξ_2 正相关， ξ_2 和 ξ_3 负相关，而 ξ_1 和 ξ_3 没有相关性。同时，也可以看出拉普拉斯分布和高斯分布有着不同的样本分布特性，即拉普拉斯分布的样本点在原点附近的出现频率更大。这也和拉普拉斯

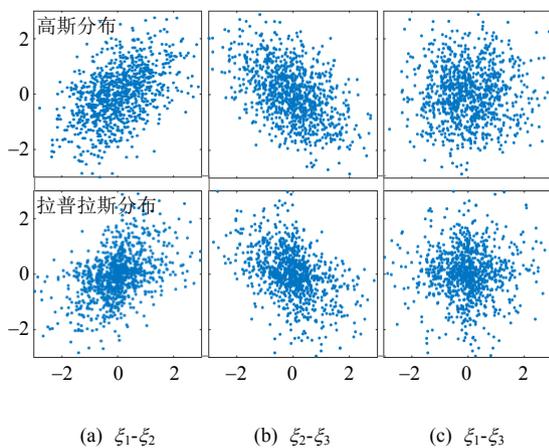


图 5 三维伊藤过程的场景图

Fig. 5 Scenarios of the 3-dimensional Itô process

$N(0, 1)$ 和拉普拉斯分布 $\text{Laplace}(0, 1/\sqrt{2})$ 。在正态分布下，可以构造相应如下的伊藤过程：

$$d\xi_t = -\xi_t dt + \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.8660 & 0 \\ 0 & -0.5774 & 0.8165 \end{bmatrix} dW_t \quad (29)$$

而在拉普拉斯分布下，可以构造如下的伊藤过程：

分布的概率密度函数相符合。本算例说明，伊藤过程能够有效地满足给定的分布特性和空间相关性。

4.1.3 算例 1.3：基于时序相关性的构造方法

本算例用于验证图 3 所示的考虑时序相关性的伊藤过程的构造方法的正确性。首先验证伊藤过程的指数相关性，构造如下形式的伊藤过程：

$$d\xi_t = -\lambda \xi_t dt + \sqrt{\lambda} \sigma(\xi_t) dW_t \quad (33)$$

式中 $\sigma(\xi_t)$ 根据随机量的概率分布，由表 1 确定。本例中同样讨论高斯分布和拉普拉斯分布两种情况。

图 6(a)给出了 $\lambda=1$ 时，统计得到的伊藤过程自相关函数，并给出了理论自相关函数作为对比。可以看出，在本例中，在两种情形(正态分布和拉普拉斯分布)下，统计得到的自相关函数均和理论自相关函数一致。图 6(b)以正态分布的 ξ_t 为例，统计了不同的系数 λ 对自相关函数的影响。可以发现， λ 较大时，自相关函数随着 τ 增大的衰减也较快。这是因为 λ 较大时， ξ_t 随时间的衰减较快，因此对其后的 ξ_t 的影响也较小。

下面讨论一般自相关函数，并以如下自相关函

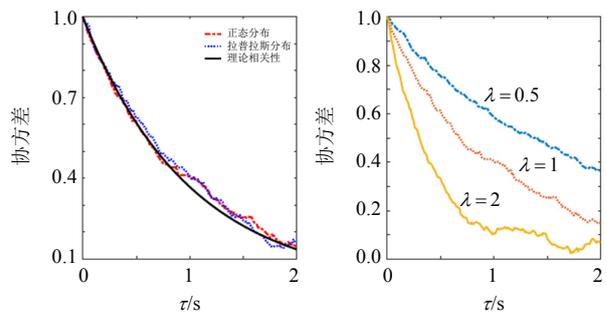


图 6 伊藤过程的指数时序相关性

Fig. 6 Exponential temporal correlation of Itô process

数为例，验证图 3 所示算法的正确性：

$$R(\tau) = \frac{R(0)}{\tau + 1} \quad (34)$$

可以根据式(20)确定 $q(\lambda)$ ，从而构造如下的伊藤过程：

$$\begin{cases} d\lambda_t = -(\lambda_t - 1)dt + \sqrt{2 \max\{\lambda_t, 0\}}dW_t^\lambda \\ d\xi_t = -\lambda_t \xi_t dt + \sqrt{\lambda_t} \sigma(\xi_t) dW_t \end{cases} \quad (35)$$

2 种分布对应的伊藤过程的自相关函数如图 7 所示。由此可见，伊藤过程在描述给定的概率分布的同时，也可以较准确地描述给定的时序相关性。

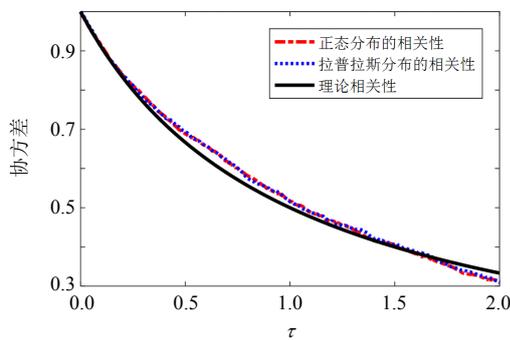


图 7 一般的时序相关性

Fig. 7 General temporal correlation of the constructed Itô process

4.2 算例 2：伊藤过程的参数估计

4.2.1 算例 2.1：某光伏电站的出力随机性参数估计

本算例以四川地区某光伏电站的出力数据作为待估计量，进行参数估计。该光伏电站的数据分辨率为 1min。由于光伏出力受到阳光照射角度的影响，而阳光照射角度和光照强度在一天中变化很大，因此为了消除其影响，将光伏出力曲线除以当天的阳光照射强度曲线(该曲线只考虑光照角度和强度，不考虑天气因素，因此可以事先给定)，得到归一化的出力曲线。归一化的出力曲线反映了天气因素和其他随机因素对于光伏出力的影响^[36]。最后，将归一化的出力曲线作为待预测对象，并将预测误差作为待估计的随机过程。预测误差的统计特性有可能与采用的预测算法有关，由于本文并不讨论具体的预测算法，此处采用最基本的保持性预测(persistence prediction)，将每个时刻的光伏(归一化)真实出力作为其 15min 后的出力的预测值，该在已有的预测误差统计特性研究中也常被采用^[20-21]。

待估计的光伏发电曲线如图 8 所示。

取 10:00—18:00 的数据，以前 4h 作为训练数

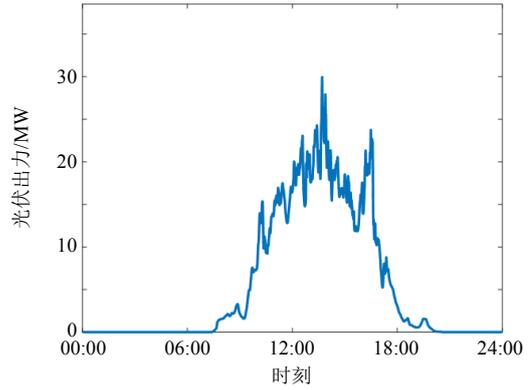


图 8 算例 2.1：待估计的光伏实际出力曲线

Fig. 8 Case 2.1: power output of pv to be estimated

据，后 4h 作为测试数据。将光伏出力除以当天的光照强度曲线，并计算其与预测数据的偏差后，得到的训练数据和测试数据如图 9 所示。

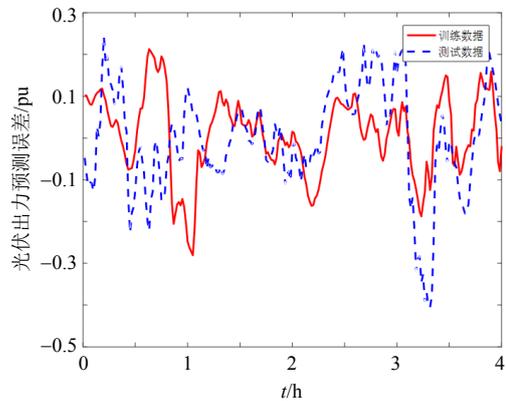


图 9 算例 2.1：训练数据和测试数据

Fig. 9 Case 2.1: training and testing data

本算例待估计的伊藤过程为线性伊藤过程，即：

$$d\xi_t = -\lambda \xi_t dt + \sigma dW_t \quad (36)$$

因此待估计的参数为衰减系数 λ 和扩散系数 σ 。利用极大似然方法进行参数估计，可以得到 λ 和 σ 的估计值为 $\hat{\lambda} = 2.9345$ ， $\hat{\sigma} = 0.2269$ 。

为了验证该结果的有效性，此处根据式(27)计算负对数似然概率(即目标函数)，并对比不同的 λ 和 σ 在训练集和测试集上的目标函数值，如图 10 所示。为方便起见，此处将负对数似然概率归一化到 [0,1] 区间。由图 10 可知，在训练集上得到的最优估计值 $\hat{\lambda}$ 和 $\hat{\sigma}$ ，不仅在训练集上达到了最低的目标函数值，在测试集上的目标函数值也低于其他的 λ 和 σ 的组合。

图 11 利用估计出的参数，根据上一时刻的光伏随机性取值计算下一时刻的随机性置信区间。可以看出，所估计出的参数能够很好地将训练数据和

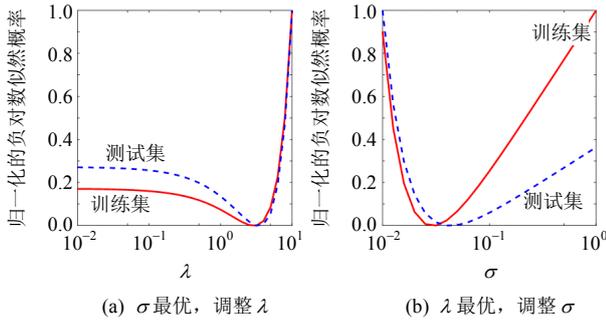


图 10 算例 2.1: 不同参数下的目标函数
Fig. 10 Case 2.1: objective functions under different parameters

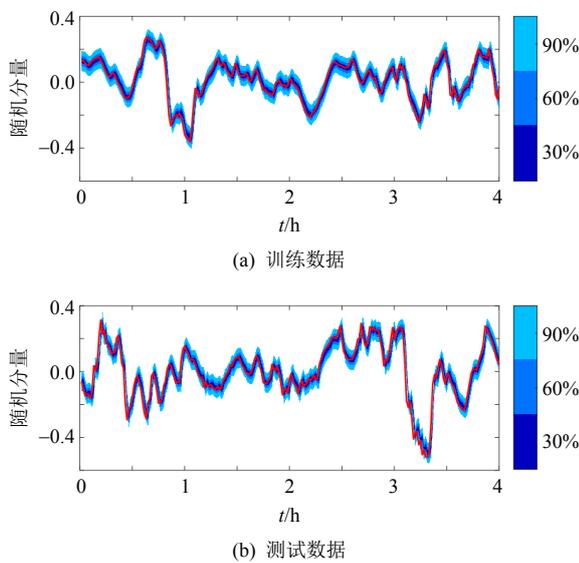


图 11 算例 2.1: 由估计参数所得到的置信区间
Fig. 11 Case 2.1: confidence interval obtained from estimated parameters

测试数据包含在内。表 3 统计了训练数据和测试数据的曲线落在各个置信区间的概率,可以看出,训练数据落在各个区间的概率与理论概率较为吻合,而测试数据落在各个区间的概率则偏低。这是因为模型参数的估计并未用到测试数据,因此在测试数据上的误差会大于训练数据上的误差。图 10、11 和表 3 均说明,在实际应用中,可以基于历史数据得到伊藤过程的参数,并将该伊藤过程参数用于下一阶段控制策略的制定。

表 3 算例 2.1: 置信区间的统计数据
Tab. 3 Case 2.1: statistics of confidence interval

置信区间	落在该区间的比例/%	
	训练数据	测试数据
30%区间	32.92	26.67
60%区间	63.50	53.75
90%区间	90.83	80.83

4.2.2 算例 2.2: 某风场的风电机组随机性参数估计

本算例在同一个风场中抽取了 3 个风电机组,并对其随机性进行伊藤过程参数估计。待估计的风电机组记为风机 1、风机 2 和风机 3,其中,风机 1 和风机 2 的距离较近,而两者均与风机 3 的距离较远,因此,本算例可用于验证伊藤过程的空间相关性的估计结果。所采用的实际数据的分辨率为 10 分钟,以 3 天的风电出力实际数据作为训练数据,随后的 1 天的风电出力实际数据作为测试数据。与算例 2.1 相同,待估计量为预测误差,而预测值则类似于文献[20]中的方式,设置为 1h 前的实际出力(即保持性预测, persistence prediction)。训练数据和测试数据的波形如图 12 所示。

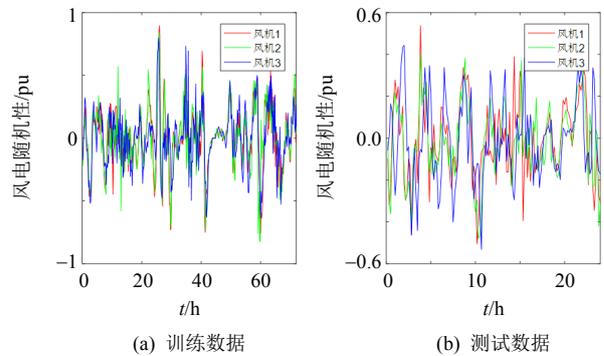


图 12 算例 2.2: 训练数据和测试数据
Fig. 12 Case 2.2: training and testing data

对训练数据进行参数估计,可以得到如下的伊藤过程:

$$d\xi_t = -1.3183\xi_t + \begin{bmatrix} 0.3436 & 0.2401 & 0.0461 \\ 0 & 0.3081 & 0.0372 \\ 0 & 0 & 0.3717 \end{bmatrix} dW_t \quad (37)$$

根据 2.3 节可知,该伊藤过程所对应的各个风机之间的相关系数为

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0.6147 & 0.1225 \\ 0.6147 & 1 & 0.1532 \\ 0.1225 & 0.1532 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

可以看出,风机 1 和风机 2 之间的正相关性较强,而风机 3 和前两者的正相关性则较弱。这和 3 个风机的地理位置关系是一致的,即:风机 1 和风机 2 地理位置较近,而风机 3 距离前 2 台风机较远。为了进一步说明所估计的结果的有效性,图 13 给出了在给定风机 1 的出力时,风机 2 和风机 3 的统计平均出力,并与根据式(37)算出的理论结果进行了比较。由图 13 可以明显地看出风机 2 与风机 1

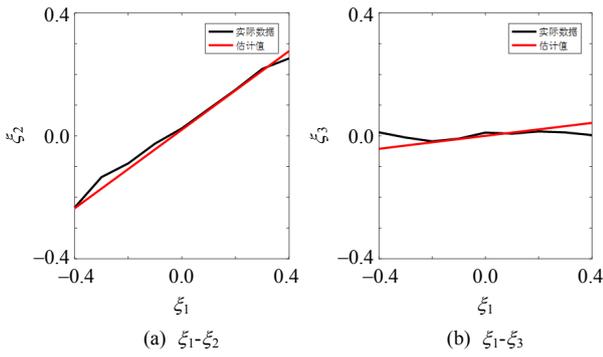


图 13 算例 2.2: 在不同的 ξ_1 下的其他变量的统计均值

Fig. 13 Case 2.2: average values of variables under different ξ_1

由很强的正相关性，而风机 3 和风机 1 则相关性较弱。并且，由估计得到的模型计算出的理论结果也满足同样的规律，因此与实际数据的统计结果较为吻合。

与算例 2.1 相似，此处根据所得到的估计模型计算置信区间。为方便起见，此处给出 3 个风机的总出力的随机性的置信区间。由图 14 和表 4 可以得出与算例 2.1 类似的结论，此处不再赘述。由本算例可知，伊藤过程可以有效地建模风电出力的预

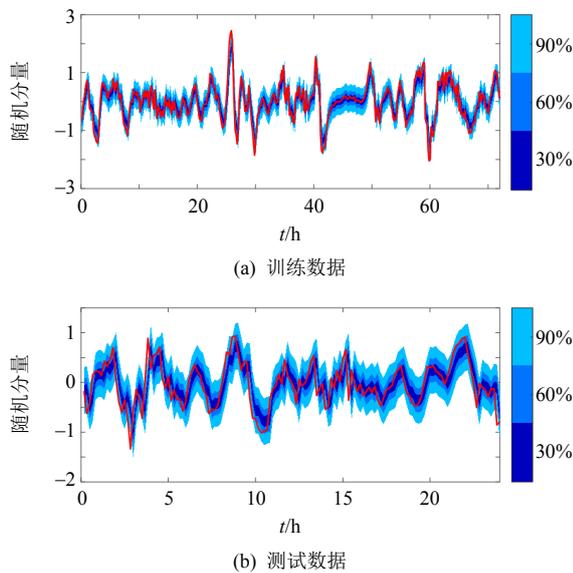


图 14 算例 2.2: 由估计参数所得到的置信区间

Fig. 14 Case 2.2: confidence interval obtained from estimated parameters

表 4 算例 2.2: 置信区间的统计数据

Tab. 4 Case 2.2: statistics of confidence interval

置信区间	落在该区间的比例/%	
	训练数据	测试数据
30%区间	33.33	26.39
60%区间	58.56	61.81
90%区间	86.81	86.81

测误差，同时可以考虑随机性的空间相关性。

5 结论

本文给出了新能源出力随机性的伊藤模型，论证了其在描述新能源出力随机性的概率分布、时空相关性等方面的有效性，并给出了实用的参数估计方法。

本文的研究表明，给定新能源的概率分布、时序相关性、空间相关性等特征，可以构造相应的伊藤过程漂移项和扩散项，使所构造的伊藤过程满足这些随机特性。因此，伊藤过程具有较为广泛的适用性。

同时，本文给出了基于历史数据的伊藤过程参数估计方法，即极大似然法。该方法将伊藤过程的漂移项和扩散项作为含有未知参数的函数，通过最大化对数似然概率得到最优的参数，从而得到伊藤过程的漂移项和扩散项。在实际应用中，可以根据历史数据得到伊藤过程的参数，并将其应用于后续的控制。

本文的分析从模型和数据的角度分别验证了伊藤过程作为新能源出力随机性模型的合理性，可为基于伊藤过程的新能源电力系统分析与控制方法提供建模基础。

参考文献

- [1] 卢斯煜, 周保荣, 饶宏, 等. 高比例光伏发电并网条件下中国远景电源结构探讨[J]. 中国电机工程学报, 2018, 38(S1): 39-44.
Lu Siyu, Zhou Baorong, Rao Hong, et al. Research of the prospect of China power generation structure with high proportion of photovoltaic generation[J]. Proceedings of the CSEE, 2018, 38(S1): 39-44(in Chinese).
- [2] 张宁, 康重庆, 肖晋宇, 等. 风电容量可信度研究综述与展望[J]. 中国电机工程学报, 2015, 35(1): 82-94.
Zhang Ning, Kang Chongqing, Xiao Jinyu, et al. Review and prospect of wind power capacity credit[J]. Proceedings of the CSEE, 2015, 35(1): 82-94(in Chinese).
- [3] Papaefthymiou G, Kurowicka D. Using copulas for modeling stochastic dependence in power system uncertainty analysis[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2009, 24(1): 40-49.
- [4] Perninge M, Soder L. A stochastic control approach to manage operational risk in power systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2012, 27(2): 1021-1031.
- [5] 蔡宇, 林今, 万灿, 等. 市场环境基于随机规划的主动配电网运行交易二层优化模型[J]. 中国电机工程学报, 2016, 36(20): 5391-5402.

- Cai Yu, Lin Jin, Wan Can, et al. A Bi-level stochastic programming approach for strategic active distribution network operation in electricity market[J]. Proceedings of the CSEE, 2016, 36(20): 5391-5402(in Chinese).
- [6] Yang Lei, He Miao, Vittal V, et al. Stochastic optimization-based economic dispatch and interruptible load management with increased wind penetration[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2016, 7(2): 730-739.
- [7] Engels J, Claessens B, Deconinck G. Combined stochastic optimization of frequency control and self-consumption with a battery[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2019, 10(2): 1971-1981.
- [8] Calafiore G C. Random convex programs[J]. SIAM Journal on Optimization, 2010, 20(6): 3427-3464.
- [9] Apostolopoulou D, Domínguez-García A D, Sauer P W. An assessment of the impact of uncertainty on automatic generation control systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2016, 31(4): 2657-2665.
- [10] 伍海华, 杨德平. 随机过程: 金融资产定价之应用[M]. 北京: 中国金融出版社, 2002.
Wu Haihua, Yang Deping. Stochastic process: applications on financial asset pricing[M]. Beijing: China Financial Press, 2002(in Chinese).
- [11] Åström K J. Introduction to stochastic control theory[M]. Mineola: Courier Corporation, 2012.
- [12] 李洪宇, 鞠平, 余一平, 等. 随机激励下系统频率动态安全性量化评估及半解析分析[J]. 中国电机工程学报, 2017, 37(7): 1955-1963.
Li Hongyu, Ju Ping, Yu Yiping, et al. Quantitative assessment and semi-analytical analysis for system frequency dynamic security under stochastic excitation [J]. Proceedings of the CSEE, 2017, 37(7): 1955-1963(in Chinese).
- [13] Yuan Bo, Zhou Ming, Li Gengyin, et al. Stochastic small-signal stability of power systems with wind power generation[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2015, 30(4): 1680-1689.
- [14] Chen Xiaoshuang, Lin Jin, Liu Feng, et al. Stochastic assessment of AGC systems under non-gaussian uncertainty[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2019, 34(1): 705-717.
- [15] Chen Xiaoshuang, Lin Jin, Liu Feng, et al. Optimal control of AGC systems considering Non-Gaussian wind power uncertainty[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2019, 34(4): 2730-2743.
- [16] Jiang Hao, Lin Jin, Song Yonghua, et al. MPC-based frequency control with demand-side participation: A case study in an isolated wind-aluminum power system[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2015, 30(6): 3327-3337.
- [17] Bevrani H. Robust power system frequency control[M]. New York: Springer, 2009.
- [18] Tseng S H, Bitar E, Tang Ao. Random convex approximations of ambiguous chance constrained programs[C]//Proceedings of the 55th Conference on Decision and Control. Las Vegas, NV, USA: IEEE, 2016: 6210-6215.
- [19] Karatzas I, Shreve S E. Brownian motion and stochastic calculus[M]. New York: Springer, 2012.
- [20] Bludszuweit H, Dominguez-Navarro J A, Lombart A. Statistical analysis of wind power forecast error[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2008, 23(3): 983-991.
- [21] Tabone M D, Callaway D S. Modeling variability and uncertainty of photovoltaic generation: a hidden state spatial statistical approach[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2015, 30(6): 2965-2973.
- [22] Conradsen K, Nielsen L B, Prahm L P. Review of Weibull statistics for estimation of wind speed distributions[J]. Journal of climate and Applied Meteorology, 1984, 23(8): 1173-1183.
- [23] Shedd S, Hodge B M, Florita A, et al. Statistical characterization of solar photovoltaic power variability at small timescales: Preprint[R]. Golden: National Renewable Energy Laboratory (NREL), 2012.
- [24] Lee D, Baldick R. Probabilistic wind power forecasting based on the Laplace distribution and golden search [C]//2016 IEEE/PES Transmission and Distribution Conference and Exposition (T&D). Dallas, TX, USA: IEEE, 2016: 1-5.
- [25] Femin V, Petra M I, Mathew S, et al. Modeling the temporal variations in the output of large solar PV power plants[J]. Energy Procedia, 2016, 95: 294-301.
- [26] Hadjiyiannis M J, Goulart P J, Kuhn D. An efficient method to estimate the suboptimality of affine controllers[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(12): 2841-2853.
- [27] 赵唯嘉, 张宁, 康重庆, 等. 光伏发电出力的条件预测误差概率分布估计方法[J]. 电力系统自动化, 2015, 39(16): 8-15.
Zhao Weijia, Zhang Ning, Kang Chongqing, et al. A method of probabilistic distribution estimation of conditional forecast error for photovoltaic power generation[J]. Automation of Electric Power Systems, 2015, 39(16): 8-15(in Chinese).
- [28] David M, Ramahatana F, Trombe P J, et al. Probabilistic forecasting of the solar irradiance with recursive ARMA and GARCH models[J]. Solar Energy, 2016, 133: 55-72.
- [29] Huang Rui, Huang T, Gadh R, et al. Solar generation prediction using the ARMA model in a laboratory-level micro-grid[C]//2012 IEEE Third International Conference on Smart Grid Communications (SmartGridComm). Tainan, China: IEEE, 2012: 528-533.

- [30] Brown B G, Katz R W, Murphy A H. Time series models to simulate and forecast wind speed and wind power[J]. Journal of Climate and Applied Meteorology, 1984, 23(8): 1184-1195.
- [31] Papaefthymiou G, Klockl B. MCMC for wind power simulation[J]. IEEE Transactions on Energy Conversion, 2008, 23(1): 234-240.
- [32] Apt J. The spectrum of power from wind turbines[J]. Journal of Power Sources, 2007, 169(2): 369-374.
- [33] Mignolet M P. ARMA simulation of multivariate and multidimensional random processes[D]. Houston: Rice University, 1987.
- [34] Lo A W. Maximum likelihood estimation of generalized Itô processes with discretely sampled data[J]. Econometric Theory, 1988, 4(2): 231-247.
- [35] Li Chenxu. Maximum-likelihood estimation for diffusion processes via closed-form density expansions[J]. The Annals of Statistics, 2013, 41(3): 1350-1380.
- [36] Ekström J, Koivisto M, Millar J, et al. A statistical approach for hourly photovoltaic power generation modeling with generation locations without measured data[J]. Solar Energy, 2016, 132: 173-187.

附录 A 图 1 所示算法的证明

根据 Fokker-Planck 方程, 概率密度函数满足如下公式:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi}(\mu p) + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(Dp) \quad (A1)$$

在平稳状态下有:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\mu p) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(Dp) \quad (A2)$$

对两边分别积分, 并考虑到概率密度函数在无穷远处为零, 可得:

$$\mu p = \frac{\partial}{\partial \xi}(Dp) \quad (A3)$$

再对两边积分即可得到式(11)

附录 B 空间相关性式(15)、(16)的证明

此处需要证明扩散项满足式(15)、(16)时, 对应伊藤过程的协方差矩阵为 M 。为此, 只需证明 ξ_t 的相关系数为 r_{ij} 即可。

为此, 将 $\mu(\xi_t) = -\xi_t$ 代入伊藤过程表达式, 得到 $d\xi_t = -\xi_t dt + \sigma(\xi_t)dW_t$ 。再根据伊藤换元公式, 可以得到:

$$d\xi_t \xi_t^T = (-2\xi_t \xi_t^T + \sigma(\xi_t)\sigma(\xi_t)^T)dt + \sigma(\xi_t)dW_t \xi_t^T + \xi_t(\sigma(\xi_t)dW_t)^T \quad (B1)$$

对等式两边取期望, 并考虑 dW_t 的期望为零, 可以得到:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{E} \xi_t \xi_t^T = -2\mathbf{E} \xi_t \xi_t^T + \mathbf{E} \sigma(\xi_t)\sigma(\xi_t)^T \quad (B2)$$

在平稳状态下, 等式两边均为零, 于是可以得到:

$$\mathbf{E} \xi_t \xi_t^T = \mathbf{E} D(\xi_t) \quad (B3)$$

将式(15)、(16)代入 $D(\xi_t)$ 的表达式, 并考虑等式两边的相关系数, 即可得到:

$$\frac{\mathbf{E} \xi_t \xi_j^T}{\sqrt{\mathbf{E} \xi_t^2} \sqrt{\mathbf{E} \xi_j^2}} = \frac{\mathbf{E} D_{ij}}{\sqrt{\mathbf{E} D_{ii}} \sqrt{\mathbf{E} D_{jj}}} = \frac{r_{ij} \theta_{ij} \mathbf{E} \sqrt{D_{ii} D_{jj}}}{\sqrt{\mathbf{E} D_{ii}} \sqrt{\mathbf{E} D_{jj}}} = r_{ij} \quad (B4)$$

附录 C 图 3 所示算法的证明

利用多变量 Fokker-Planck 公式可以证明, ξ_t 和 λ_t 在平稳状态下分布为 $p(\xi, \lambda) = p(\xi)q(\lambda)$ 。接下来考虑自相关函数:

$$R(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\xi_t \xi_{t+\tau}^T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\xi_t \mathbf{E}^{\xi_t, \lambda_t} \xi_t^T) = \iint \xi p(\xi, \lambda) v(\tau, \xi, \lambda) d\xi d\lambda \quad (C1)$$

式中 $v(\tau, \xi, \lambda) = \mathbf{E}^{\xi, \lambda} \xi_{t+\tau}^T$ 表示初始值为 ξ 、衰减系数为 λ 的伊藤过程在 τ 时刻的期望值。直接计算可以得到:

$$v(\tau, \xi, \lambda) = \xi e^{-\lambda \tau} \quad (C2)$$

于是有:

$$R(\tau) = \iint \xi^2 p(\xi) q(\lambda) e^{-\lambda \tau} d\xi d\lambda = \int \xi^2 p(\xi) d\xi \int q(\lambda) e^{-\lambda \tau} d\lambda = R(0) \int q(\lambda) e^{-\lambda \tau} \quad (C3)$$



陈晓爽

收稿日期: 2019-02-01。

作者简介:

陈晓爽(1993), 男, 博士研究生, 研究方向为电力系统随机优化与控制技术, chen-xs14@mails.tsinghua.edu.cn;

林今(1985), 男, 副教授, 博士生导师, 研究方向为电气与氢储能系统的控制与接入、能源物联网与新能源电力系统基础理论;

刘锋(1977), 男, 副教授, 博士生导师, 研究方向为电力系统稳定与优化控制、新能源发电并网与调度消纳、电力系统决策与控制的博弈论方法;

宋永华(1964), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为智能电网和电力市场相关技术等。

(责任编辑 乔宝榆)